26/11/2020

Για Θεώρημα 16, Evans, σελ. 42
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό φραγμένο, $\partial U \in C^1$.
$w \in C^2(\overline{U})$, $\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{στο } U \\ w = 0, & \text{στο } \partial U \end{cases}$

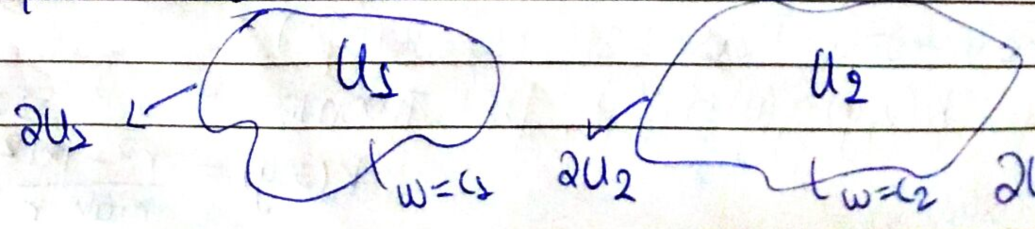
$$0 = -\int_U w\Delta w\,dx \underset{\text{Green}}{\overset{}{\underset{\text{τύπος}}{=}}} \int_U Dw\cdot Dw\,dx - \int_{\partial U} w\,\frac{\partial w}{\partial r}\,dS(x)$$

(r = εξωτ. μοναδιαίο κάθετο στο ∂U, το οποίο $\exists$, αφού $\partial U \in C^1$)

$$= \int_U |Dw|^2 dx \Rightarrow Dw \equiv 0 \text{ στο } U \left[\Rightarrow Dw \equiv 0 \text{ στο } \overline{U}\right]$$

$\Rightarrow w \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, στις συνεκτικές συνιστώσες του $U \Rightarrow w \equiv 0$ στο U, αφού $w=0$ στο ∂U. ☒

Σχόλια 1) Έστω U μη συνεκτικό, τότε αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες, το σύνορο των οποίων είναι υποσύνολο του συνόρου του U.

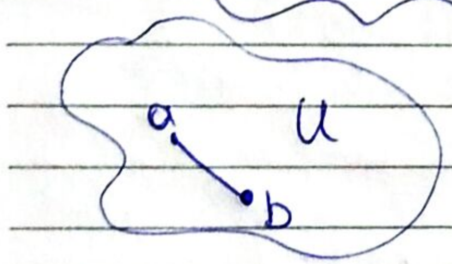


$U = U_1 \cup U_2$
$\partial U = \partial U_1 \cup \partial U_2$

Άρα, $\omega = 0$ στο $\partial U \Longrightarrow$
$\omega = 0$ στο $\partial U_1, \partial U_2$.

2) Έστω U συνεκτικό ανοικτό (= τόπος) $\subset \mathbb{R}^n$ και $\omega \in C^1(U)$ $D\omega \equiv 0$ στο U
$\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \omega \equiv c$, στο U
[γενικώς, για μη συνεκτικά U, μπορούμε να έχουμε στο U διαφορετικές σταθερές σε κάθε συνεκτική συνιστώσα]

Απόδειξη (Κανόνας Αλυσίδας + συνεκτικότητα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$)
Έστω $a, b \in U$, $a \neq b$. Τότε για
$x(t) = ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$ με $x(t) \in U$ $\forall t \in [0,1]$.
$= b + t\underbrace{(a-b)}_{\neq 0}$



$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left[\omega(x(t))\right] = \underbrace{D\omega(x(t))}_{=0 \text{ στο } U} \cdot \dot{x}(t)$$

$$\Longrightarrow \omega(x(t)) = \omega(\underbrace{x(0)}_{=b}) = \omega(\underbrace{x(1)}_{=a}),\ \forall t \in [0,1].$$

Επειδή $U \subseteq \mathbb{R}^n$ τόπος κάθε διαφορετικά $a, b \in U$ συνδέονται με μία πολυγωνική γραμμή δηλ. άθροισμα ευθ. τμημάτων, όπως το $x(t)$.

$\Longrightarrow \forall a, b \in U : \omega(a) = \omega(b) \Longrightarrow$
Για οποιοδήποτε $a \in U$: $\forall b \in U$: $\omega(b) = \omega(a) = c$. $\boxtimes$

3) $f \in C(U)$, $f \geq 0$

$$\int_U f\,dx = 0 \implies f \equiv 0$$

[Έστω ένα $x_0 \in U$ με $f(x_0) > 0$, τότε
$\exists\, \overline{B}(x_0,\varepsilon) \subset U$ με $f(y) \geq \underbrace{\min_{x \in \overline{B}(x_0,\varepsilon)} f(x)}_{>0}$, $\forall y \in \overline{B}(x_0,\varepsilon)$

$$\implies \int_U f\,dx \underset{f \geq 0}{\geq} \int_{\overline{B}(x_0,\varepsilon)} f\,dx \geq$$

$$\underbrace{\left(\min_{\overline{B}(x_0,\varepsilon)} f\right)}_{>0} \underbrace{|\overline{B}(x_0,\varepsilon)|}_{>0} > 0$$, άτοπο στο

$$\int_U f\,dx = 0 \ ]$$

4) $u \in [C^2(\overline{U}) \subset]\ C^2(U) \cap C(\overline{U})$,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U \end{cases} \implies f \in C(U),\ g \in C(\partial U)$$

Μέθοδοι ενέργειας για ελλειπτικές εξισώσεις ιδίως: «λογισμός μεταβολών» (variational calculus) (Αρχή του Dirichlet)

Έστω $\underset{((46)\ \text{Evans σελ. 41})}{(1)}$: $\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } U \\ u = g, & \text{στο } \partial U \end{cases}$ για

λύσεις $u \in C^2(\overline{U})$. Θέτουμε:

$\mathcal{A} := \{ w \in C^2(\overline{U}) : w = g$ στο $\partial U \} \subset C^2(\overline{U})$

[$\mathcal{A}$ δεν είναι υπόχωρος, αφού π.χ. για $g \neq 0$, $w \in \mathcal{A} \Rightarrow 2w \notin \mathcal{A}$]

και $I[w] := \int_U \left(\frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \right)$, $w \in \mathcal{A}$,

ένα καλά ορισμένο (μη γραμμικό) συναρτησοειδές (functional) που ονομάζεται συναρτησοειδές ενέργειας $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

[μη γραμμικό: $I[2w] = \int_U \left(4 \cdot \frac{1}{2} |Dw|^2 - 2wf \right) dx \neq 2I[w]$, για $Dw \not\equiv 0$, πιο συγκεκριμένα τετραγωνικό (ως προς την μη γραμμικότητα)].

Θεώρημα 17 (Αρχή του Dirichlet)

Έστω $u \in C^2(\overline{U})$ επιλύει την (1) τότε η u είναι ο ελαχιστοποιητής (minimizer) του συναρτησοειδούς I, δηλ. ισχύει η (2) $I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]$, και αντίστροφα: Αν ισχύει η (2) για κάποιο $u \in \mathcal{A}$, τότε η u επιλύει την (1).

Σχόλιο: Βρίσκω την λύση $u \in \mathcal{A}$ του (1) $\Longleftrightarrow$ Βρίσκω τον ελαχιστοποιητή του (2)

Η ΜΔΕ (1) ονομάζεται εξίσωση Euler-Lagrace για το συναρτησοειδές I (γενικότερο concept του λογ. μεταβολών)

<u>Απόδειξη</u>: Έστω u λύνει το (1) $\Longrightarrow$ $u \in \mathcal{A}$. Έστω $w \in \mathcal{A}$ οποιοδήποτε.

Τότε: $$0 = \int_U \underbrace{(-\Delta u - f)}_{\substack{=0 \\ \text{αφού } u \text{ λύνει το (1)}}} (u-w)\, dx$$

$$= \underbrace{\int_U (-\Delta u) \underbrace{(u-w)}_{\substack{=0, \\ \text{στο } \partial U \\ (\text{αφού } u, w \in \mathcal{A})}} dx}_{\underset{\text{Green}}{=} \int_U Du \cdot D(u-w)} - \int_U f(u-w)\, dx$$

$$\Longrightarrow 0 = \int_U \Big[\underbrace{Du \cdot D(u-w)}_{= |Du|^2 - Du\cdot Dw} - \underbrace{f(u-w)}_{= -fu + fw}\Big]\, dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_U |Du|^2 - u \cdot f\, dx$$

$$= \int_U Du \cdot Dw - w \cdot f\, dx$$

$$= \underbrace{\int_U Du \cdot Dw}_{} - \int_U w \cdot f \cdot dx$$

$$\leq \int_U \underbrace{|Du(x) \cdot Dw(x)|}_{} \, dx$$ ← απολ. τιμή στον $\mathbb{R}$.

$$\underset{\substack{C\text{-}S \\ \text{στον } \mathbb{R}^n}}{\leq} |Du(x)| \cdot |Dw(x)|$$ ← ευκλ. νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

$$\leq \frac{1}{2} |Du(x)|^2 + \frac{1}{2} |Dw(x)|^2.$$

$$\Longrightarrow \int_U |Du|^2 - fu \, dx$$

$$\leq \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 dx + \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - fw \, dx$$

$$\Longleftrightarrow I[u] = \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 - fu \, dx \leq$$

$$\int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - fw \, dx = I[w], \quad \forall w \in A$$

και αφού $u \in A$: $I[u] = \min_{w \in A} I[w]$ (2).

Έστω τώρα ότι $u \in \mathcal{A}$ με

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w] \quad (2)$$

Σταθεροποιώ κάποιο $v \in C_c^\infty(U)$ και θέτω $i(\tau) := I[u + \tau v]$, $\tau \in \mathbb{R}$.
($u + \tau v \in \mathcal{A}$, αφού $v \in C^2(\overline{U})$ με $v = 0$ στο ∂U

$\Longrightarrow u + \tau v = g$ στο ∂U)

Παρατηρούμε $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ότι στο σημείο $\tau = 0$ η $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λαμβάνει ελάχιστο [αφού $i(0) = I[u] \leq I[w]$, $\forall w \in \mathcal{A}$ και συνεπώς ειδικότερα $i(0) \leq I[u + \tau v] = i(\tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ (όπου $v \in C_c^\infty(U) \subset \mathcal{A} \subset C^2(\overline{U})$)

$\Longrightarrow$ Συνεπώς αν η $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο 0 τότε $i'(0) = 0$.
Πράγματι, έχουμε $i(\tau) = \int_U \frac{1}{2} |Du + \tau Dv|^2 -$

$(u + \tau v) f \, dx =$

$$\int_U \frac{1}{2} |Du|^2 + \tau \, Du \cdot Dv + \frac{\tau^2}{2} |Dv|^2 - (u + \tau v) f \, dx$$

$= I[u]$
$= i(0)$

$$\underset{\tau \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} = \int_U (Du \cdot Dv - v) f \, dx +$$

$\tau \int \frac{1}{2} |Dv|^2 dx \Longrightarrow$

$$i'(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} =$$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{I[u+\tau v] - I[u]}{\tau}$$ [= παράγωγος

Gateaux του συναρτησοειδούς I]

$$= \int_U Du \cdot Dv - vf \, dx \underset{\substack{\text{Green} \\ (v=0 \text{ στο } \\ \partial U)}}{=}$$

$$\int_U (-\Delta u - f) v \, dx$$

$$\underset{v'(0)=0}{\Longrightarrow} \int_U (-\Delta u - f) v \, dx = 0 \, , \forall v \in C_c^\infty(U)$$

$$\underset{\substack{\text{βλ. προηγ.} \\ \text{σχόλιο}}}{\Longrightarrow} -\Delta u - f = 0 \, , \forall x \in U$$

[επίσης: $u = g$ στο ∂U, αφού $u \in \mathcal{A}$]

$\Longrightarrow$ η λύση της (1). $\boxtimes$

<u>Παρατήρηση</u>: Δείξαμε την ισοδυναμία της επίλυσης του π.σ.τ. Dirichlet για την εξ. Poisson με την εύρεση ελαχιστοποιητή ενός συναρτησοειδούς (δεν λύσαμε το πρόβλημα, βρήκαμε ένα ισοδύναμο).

Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται στον λογισμό μεταβολών και απαιτείται η εύρεση ελαχιστοποιητή.

Ένα πρόβλημα που υπάρχει στον λογισμό μεταβολών, είναι αν π.χ. το συναρτησοειδές I δεν έχει ελάχιστο αλλά μόνο infimum!

— — — — — — — — —

§ 2.2. Evans Εξίσωση Θερμότητας (στο $\mathbb{R}^n$) [πρότυπη εξίσωση για παραβολικές εξισώσεις].

Γενικώς, $u_t - k\Delta u = 0$, με $k > 0$

Evans: $k = 1 \to u_t - \Delta u = 0$, ομογενής εξίσωση

$u_t - \Delta u = f$, μη ομογενής εξίσωση.

$u = u(x, t)$, όπου $x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $t > 0$

π.χ. αν U φραγμένο π.ο. και πσ. τιμών (Dirichlet)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{στο } U \times (0, \infty) \\ u(t, x) = h, & \text{στο } \partial U \times (0, \infty) \end{cases}$$ (βλέπε αργότερα)

$u(0, x) = g$ στο $U \times \{0\}$

<< φυσική ερμηνεία >> : Η εξίσωση θερμότητας περιγράφει την διάχυση (diffusion) (εξ. και εξ. διάχυσης) ως συνάρτηση του χρόνου κάποιας πυκνότητας (density) u, όπως θερμότητα, χημική πυκνότητα κ.α. Έστω $V \subset U$ ένα φραγμένο λείο χωρίο (π.χ. $V = B(x, \varepsilon)$).

ο ρυθμός μεταβολής στον χρόνο της συνολικής ποσότητας (μάζας) που βρίσκεται στον V

ισούται με το αρνητικό της καθαρής συνολικής ροής που εξέρχεται από το σύνορο του V : $\frac{d}{dt}\left(\int_V u\,dx\right) =$

$- \int_{\partial V} F \cdot \nu\, dS$, όπου F είναι ροή πυκνότητας

με εξίσωση Gauss:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V u\,dx}_{=\int_V u_t\,dx} = -\int_{\partial V} F\cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{εξ.}}}{\nu}\, dS$$

μοναδ. κάθετο στο ∂V

$= -\int_V \operatorname{div} F\, dS \Longrightarrow$ επειδή αυτό ισχύει $\forall V \subset U$ έχουμε $u_t + \operatorname{div} F = 0$ στο U.

Επειδή η διάχυση συμβαίνει προς την κατεύθυνση της πιο μεγάλης μείωσης της ποσότητας u: $F = -a\underbrace{Du}_{\text{κλίση της } u}$

[στην κατεύθυνση Du έχουμε τη μεγαλύτερη αύξηση (ανά μονάδα μέτρησης του χώρου) του u]

$\Longrightarrow u_t - \operatorname{div}(a \cdot Du) = u_t - a \cdot \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\partial_i u) =$

$u_t - a\Delta u < 0.$